سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

سه‌شنبه

۱۴۰۴/۰۱/۰۵

**بانک سؤالات کنکور:**

**جامع مثلثات**

**(فصل ۲ دهم / فصل ۴ یازدهم / فصل ۲ دوازدهم)**

**دفترچه پاسخ**

# دوپینگ ماز

## گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

## حسابان

| درس | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره | زمان پیشنهادی |
|---|---|---|---|---|
| حسابان | ۲۷ | ۱ | ۲۷ | ۴۸ دقیقه |

| هفته اول | هفته دوم | هفته سوم | هفته چهارم | هفته پنجم | هفته ششم |
|---|---|---|---|---|---|
| مباحث پایه | جامع تابع+توابع نمایی و لگاریتمی | جامع مثلثات | جامع حد و پیوستگی | جامع مشتق و کاربرد مشتق | - | الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری |

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

سؤالات کنکور: فصل ۲ دهم

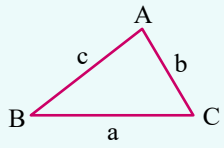
۱- مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{۳}$ و ۶ و $\alpha$ (زاویه بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، بیشترین مقدار $\alpha$ چند برابر کمترین مقدار $\alpha$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

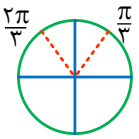
مساحت مثلث $\hat{ABC}$ از روابط زیر به دست خواهد آمد.




$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times۶\times\sqrt{۳}\times\sin\alpha=۴/۵\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\begin{cases}\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\\ \alpha_۲=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha_۲}{\alpha_۱}=\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}}=۲$$




گروه آموزشی ماز

۲- اگر $\cot x=۴$ باشد، مقدار $\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۱/۴ ۴) ۲/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

روش اول: صورت و مخرج $\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

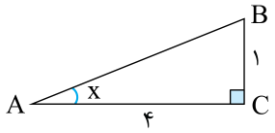
$$A=\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{\frac{۳\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x}}=\frac{۳\cot x-۱}{\cot x+۱}$$

می‌دانیم که $\cot x=۴$ است، پس:

$$A=\frac{۳\cot x-۱}{\cot x+۱}=\frac{(۳\times۴)-۱}{۴+۱}=\frac{۱۲-۱}{۴+۱}=\frac{۱۱}{۵}\xrightarrow[\times۲]{}A=\frac{۲۲}{۱۰}=۲/۲$$

روش دوم: می‌دانیم که $\cot x=۴$ است، بنابراین به کمک مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، داریم:

$$AB=\sqrt{BC^۲+AC^۲}=\sqrt{۱+۱۶}=\sqrt{۱۷}$$




$$\begin{cases}\sin x=\frac{BC}{AB}=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\\ \cos x=\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\end{cases}$$

پس حاصل خواسته شده برابر است با:

$$A=\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{\frac{۱۲}{\sqrt{۱۷}}-\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}=\frac{\frac{۱۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{۵}{\sqrt{۱۷}}}=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲$$

روش سوم: می‌دانیم که $\cot x=۴$ است، پس به کمک رابطهٔ $۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}$، داریم:

$$۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}\Rightarrow۱+۱۶=\frac{۱}{\sin^۲x}\Rightarrow\sin^۲x=\frac{۱}{۱۷}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\Rightarrow\cos^۲x=۱-\sin^۲x=۱-\frac{۱}{۱۷}=\frac{۱۶}{۱۷}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

توجه کنید که با توجه به اینکه حاصل $\cot x$، مثبت است، بنابراین $\sin x$ و $\cos x$ باید هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) که در هر دو صورت، پاسخ مسئله یکتا است. فرض می‌کنیم که $\sin x = -\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$ و $\cos x = -\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$ باشد که در این صورت:

$$A = \frac{۳\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\frac{-۱۲}{\sqrt{۱۷}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{-۴}{\sqrt{۱۷}} - \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}} = \frac{\frac{-۱۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{-۵}{\sqrt{۱۷}}} = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

و اما برای روش چهارم:

$$\cot x = ۴ \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = ۴ \Rightarrow \cos x = ۴\sin x$$

$$A = \frac{۳\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \xrightarrow{\cos x = ۴\sin x} A = \frac{۳(۴\sin x) - \sin x}{۴\sin x + \sin x} = \frac{۱۱\sin x}{۵\sin x} = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۴ یازدهم

۳- اندازه زاویه $A$ در مثلث $ABC$، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه $B$ است. حاصل $۲\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

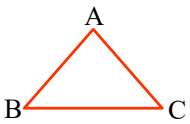
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

روش اول:

حاصل عبارت خواسته شده به ازای جمیع مقادیر زاویه‌های $A$، $B$ و $C$ که در شرط صورت سوال صدق می‌کنند، باید یکسان باشد، پس فرض می‌کنیم:

$$\hat{A} = ۹۰^\circ, \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ \Rightarrow P = ۲\cos A \sin B - \sin C = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

روش دوم:




$$A = B + \frac{\pi}{۴}$$

$$C = \pi - B - A = \pi - B - B - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} - ۲B$$

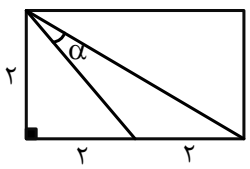
$$P = ۲\cos A \sin B - \sin C = ۲\cos(B + \frac{\pi}{۴})\sin B - \sin(\frac{۳\pi}{۴} - ۲B)$$

$$= ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\cos B - \sin B)\sin B - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\cos ۲B + \sin ۲B) = \sqrt{۲}(\cos B \sin B - \sin^۲ B) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۲B + \sin ۲B)$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\big(\sin ۲B - (۱ - \cos ۲B)\big) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۲B + \sin ۲B) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

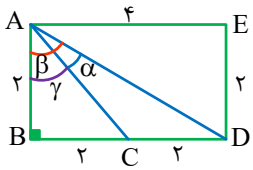
۴- در شکل زیر، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟




۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ آزمون وی ای پی (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

روش اول:




در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AED$: $AD = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

از طرفی:

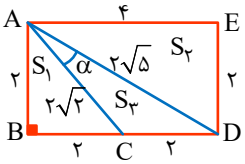
$$\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{۱+\tan\beta\tan\gamma}\;;\;\begin{cases}\tan\beta=\frac{BD}{AB}=۲\\ \tan\gamma=\frac{BC}{AB}=۱\end{cases}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲-۱}{۱+(۲)(۱)}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}}\cot\alpha=۳$$

نگاه دیگر: مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس $\gamma=۴۵^\circ$

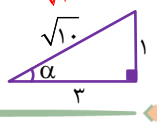
$$\tan(۴۵^\circ+\alpha)=\frac{BD}{AB}=۲\Rightarrow\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=۲\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

**روش دوم:**




$$S_{کل}=S_۱+S_۲+S_۳$$

$$۸=۲+۴+(\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۵}\times۲\sqrt{۲}\times\sin\alpha)\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$




$$\Rightarrow\cot\alpha=۳$$

گروه آموزشی ماز

۵- حاصل عبارت $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

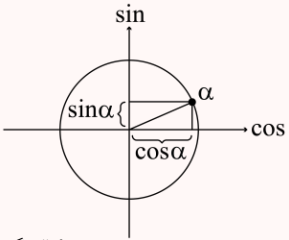
### یه جمع‌بندی پرملات از مثلثات

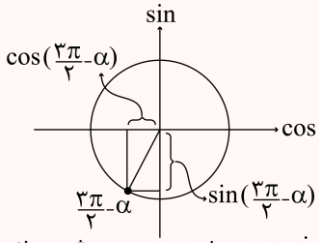
مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}$ نسبت‌های مثلثاتی را به صورت مقابل عوض می‌کنند:

$\sin\overset{\frown}{\cos}$ $\tan\overset{\frown}{\cot}$

علامت نسبت مثلثاتی با توجه به ناحیهٔ قرارگیری زاویه تعیین می‌شود.

**مثال:** نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ را بر حسب زاویهٔ $\alpha$ بنویسید.



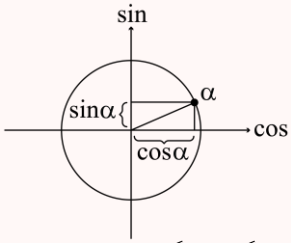



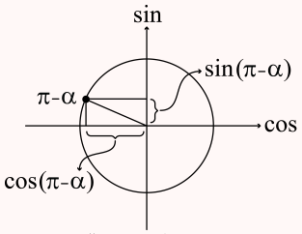

$$\sin(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}^{\text{ناحیه ۳}})=-\cos\alpha\qquad\tan(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}^{\text{ناحیه ۳}})=+\cot\alpha$$

$$\cos(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}^{\text{ناحیه ۳}})=-\sin\alpha\qquad\cot(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}^{\text{ناحیه ۳}})=+\tan\alpha$$

مضارب صحیح $\pi$ یعنی $k\pi$ نسبت‌های مثلثاتی را عوض نمی‌کنند یعنی sin همان sin، cos همان cos و... می‌شود. علامت نسبت مثلثاتی با توجه به ناحیهٔ قرارگیری زاویه تعیین می‌شود.

**مثال:** نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\pi-\alpha$ را بر حسب زاویهٔ $\alpha$ بنویسید.




$$\sin(\overbrace{\pi-\alpha}^{\text{ناحیه ۲}})=+\sin\alpha\qquad\tan(\overbrace{\pi-\alpha}^{\text{ناحیه ۲}})=-\tan\alpha$$

$$\cos(\overbrace{\pi-\alpha}^{\text{ناحیه ۲}})=-\cos\alpha\qquad\cot(\overbrace{\pi-\alpha}^{\text{ناحیه ۲}})=-\cot\alpha$$

**نکته:** برای محاسبه sin یا cos زوایای بزرگ، اندازهٔ زاویه را اگر بر حسب درجه باشد، بر $۳۶۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم و اگر زاویه برحسب رادیان باشد، مضارب صحیح و زوج $\pi$ یعنی $(۲k\pi)$ را حذف می‌کنیم.

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن نشان دهید.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

$\sin 810^\circ =$ $\cos\frac{27\pi}{4} =$ $\sin(\frac{19\pi}{2}+x) =$

$810 \mid 360$ / $720$ / $90$ ، $2$

$\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4}$ $\frac{19}{2} = 9 + \frac{1}{2}$

$\sin 810^\circ = \sin 90^\circ = 1$ $\cos\frac{27\pi}{4} = \cos(6\pi + \frac{3\pi}{4})$ $n(\frac{19\pi}{2}+x) = \sin(9\pi + \frac{\pi}{2} + x)$

$= \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $= \sin(8\pi + \frac{3\pi}{2} + x) = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$

**نکته:** برای محاسبهٔ tan یا cot زوایای بزرگ، اندازهٔ زاویه را اگر بر حسب درجه باشد، بر $180^\circ$ تقسیم می‌کنیم و باقیمانده را در نظر می‌گیریم و اگر زاویه بر حسب رادیان باشد، مضارب صحیح $\pi$ یعنی $(k\pi)$ را حذف می‌کنیم.

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن نشان دهید.

$\tan 510^\circ =$ $\cot(\frac{20\pi}{3}) =$ $\tan(\frac{9\pi}{2}+x) =$

$510 \mid 180$ / $360$ / $150$ ، $2$

$\frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ $\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$

$\tan 510^\circ = \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cot(\frac{20\pi}{3}) = \cot(6\pi + \frac{2\pi}{3})$ $\tan(\frac{9\pi}{2}+x) = \tan(4\pi + \frac{\pi}{2} + x)$

$= \cot\frac{2\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $= \tan(\frac{\pi}{2}+x) = -\cot x$

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(\frac{15\pi}{4}) = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) + \sin(\frac{15\pi}{4})\cos(\frac{13\pi}{4}) = -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶- حاصل عبارت $\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3}$، کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) $1$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

**این روابط به کارت میان**

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan\frac{17\pi}{6} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

در نهایت حاصل خواسته شده برابر است با:

$$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})+(\frac{-۱}{۲})=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

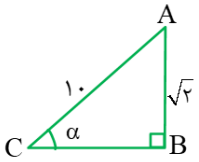
گروه آموزشی ماز

۷- اگر انتهای کمان $\alpha$ در ربع دوّم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha\right)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

چون $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ است، بنابراین به کمک مثلث قائم‌الزاویه مقابل می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی، از جمله $\cos\alpha$ را پیدا کنیم:




فیثاغورس: $AC^۲=AB^۲+CB^۲\Rightarrow ۱۰۰=۲+CB^۲\Rightarrow CB=\sqrt{۹۸}=۷\sqrt{۲}$

$$|\cos\alpha|=\frac{CB}{AC}=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}\xrightarrow{\alpha\text{ در ربع دوم}}\cos\alpha=-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

حال به سراغ خواسته سوال می‌رویم:

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha)=\cos(\frac{۱۲\pi-\pi}{۴}+\alpha)=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\cos(۳\pi+(\alpha-\frac{\pi}{۴}))=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$$

حال به کمک رابطه $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$-\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{۴})=-(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha)$$

$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{-۷\sqrt{۲}}{۱۰}+\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{-۳\sqrt{۲}}{۵})=\frac{۳}{۵}$$

گروه آموزشی ماز

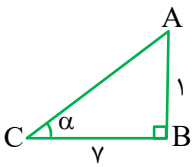
۸- اگر انتهای کمان $\alpha$ در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

$$\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

می‌دانیم که $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ است. پس می‌توانیم به کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست بیاوریم:




$$\begin{cases}\text{فیثاغورس}: (AC)^۲=(AB)^۲+(BC)^۲\Rightarrow AC^۲=۱+۴۹=۵۰\Rightarrow AC=\sqrt{۵۰}\\ \sin\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\\ \cos\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{۷}{\sqrt{۵۰}}\end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

حال حاصل نسبت مثلثاتی خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin\frac{۱۳\pi}{۴}\cos\alpha+\cos\frac{۱۳\pi}{۴}\sin\alpha \qquad (*)$$

$$\begin{cases}\sin(\frac{۱۳\pi}{۴})=\sin(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴})=\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \cos(\frac{۱۳\pi}{۴})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)}\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۷}{\sqrt{۵۰}})+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۵۰}})=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۷}{۵\sqrt{۲}})+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۱}{۵\sqrt{۲}})$$

$$\Rightarrow\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=-\frac{۷}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}=-\frac{۸}{۱۰}=-\frac{۴}{۵}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $f(\alpha)=۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha)+۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$ ، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) $-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱ آز مون وی ای پی (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته:

- $\sin ۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha$
- $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$

ابتدا تابع داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(\alpha)=۴\sin\alpha\cos ۲\alpha+۲\sin\alpha\Rightarrow f(\alpha)=۲\sin\alpha(۲\cos ۲\alpha+۱)$$

حال به کمک رابطه $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$ داریم:

$$f(\alpha)=۲\sin\alpha(۲(۱-۲\sin^{۲}\alpha)+۱)=۲\sin\alpha(۳-۴\sin^{۲}\alpha)=۲(۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha)$$

می‌دانیم که $۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha=\sin ۳\alpha$

$$f(\alpha)=۲\sin ۳\alpha$$

حال $\alpha=\frac{۴۱\pi}{۹}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(\frac{۴۱\pi}{۹})=۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۳})=۲\sin(\frac{۴۲\pi-\pi}{۳})=۲\sin(۱۴\pi-\frac{\pi}{۳})=۲\sin(-\frac{\pi}{۳})$$

$$=-۲\sin\frac{\pi}{۳}=-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\sqrt{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)}+\frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ، کدام است؟

۱) $\cos(\frac{\theta}{۲})$ ۲) $\sin(\frac{\theta}{۲})$ ۳) $۲\cot(\frac{\theta}{۲})$ ۴) $۲\tan(\frac{\theta}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

- $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta=(۱-\cos\theta)(۱+\cos\theta)\\ \cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta=(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)\end{cases}$
- $\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta\ ;\quad \sin\theta=۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}$
- $\cos ۲\theta=۱-۲\sin^{۲}\theta\rightarrow ۲\sin^{۲}\theta=۱-\cos ۲\theta\ ;\quad (۲\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}=۱-\cos\theta)$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

**روش اول:**

ابتدا در عبارت داده شده مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(\sin\theta)}=\frac{\sin^2\theta+(1-\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

می‌دانیم $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ است، بنابراین:

$$=\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

چون تمام گزینه‌ها برحسب $\frac{\theta}{2}$ است، به کمک روابط زیر عبارت به دست آمده را برحسب $\frac{\theta}{2}$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta\end{cases}$$

$$\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

**روش دوم:**

عدد گذاری: چون گزینه‌ها برحسب $\frac{\theta}{2}$ است پس باید زاویه‌ای را انتخاب کنیم که نسبت مثلثاتی نصف آن زاویه را بلد باشیم که بهترین انتخاب $\theta=60^\circ$ است.

$$\frac{\sin60^\circ}{1-\cos60^\circ}+\frac{1+\cos60^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه‌ای صحیح است که به ازای $\theta=60^\circ$، جواب $2\sqrt{3}$ را تحویل ما بدهد که تنها گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

گروه آموزشی ماز

**۱۱- اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) ۳ ۴) $-3$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

۱) $\sin^2x+\cos^2x=1$

۲) $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

۳) $\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\Rightarrow 1-\sin x=4+4\sin x\Rightarrow 5\sin x=-3$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{-3}{5}\quad,\quad \cos x=\frac{-4}{5}\quad,\quad \tan x=\frac{3}{4}$$

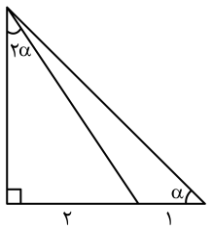
$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\Rightarrow 3-3\tan^2\frac{x}{2}=8\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 3\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}-3=0\Rightarrow(3\tan\frac{x}{2}-1)(\tan\frac{x}{2}+3)=0\Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{x}{2}=-3\checkmark\\ \tan\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

۱۲- در شکل زیر، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟




۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

**نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر زاویه**

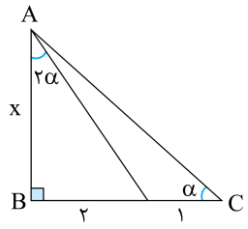
۱) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha = \begin{cases} ۲\cos^۲\alpha - ۱ \\ \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \\ ۱ - ۲\sin^۲\alpha \end{cases}$

۳) $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

۴) $\cot ۲\alpha = \dfrac{۱}{\tan ۲\alpha}$

با توجه به شکل مقابل، اگر AB را برابر x فرض کنیم، داریم:




$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{x}{۳} \\ \tan ۲\alpha = \dfrac{۲}{x} \end{cases}$$

حال به کمک رابطهٔ $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، خواهیم داشت:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{۱-(\frac{x}{۳})^۲} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{۱-\frac{x^۲}{۹}} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{\frac{۹-x^۲}{۹}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۶x}{۹-x^۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۳x}{۹-x^۲} \Rightarrow ۹-x^۲ = ۳x^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۳}{۲} \\ x = -\dfrac{۳}{۲} \xrightarrow{x>۰} \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{x} \xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} \cot\alpha = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- در مثلث ABC، اگر $\cot(B-C) = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{۲\cos(B+C)+۱}{۴\sin B\cos C}$ کدام است؟

۱) $\tan B$
۲) $\tan C$
۳) $\cot B$
۴) $\cot C$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

**نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha\pm\beta)}$$

**روش اول:**

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$\cot(B-C)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B-C=60^\circ$$

پس اختلاف دو زاویهٔ B و C باید $60^\circ$ باشد که اگر $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=0^\circ$ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{2\cos(B+C)+1}{4\sin B\cos C}=\frac{2\cos(60^\circ+0^\circ)+1}{4\sin 60^\circ\cos 0^\circ}=\frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})(1)}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\tan B=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

۲) $\tan C=\tan 0^\circ=0$

۳) $\cot B=\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴) $\cot C=\cot 0$ (تعریف نمی‌شود)

بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

**روش دوم:**

$$\cot(B-C)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\cos(B-C)=\frac{1}{2}$$

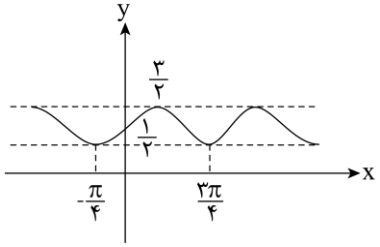
بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{2\cos(B+C)+1}{4\sin B\cos C}=\frac{2(\cos(B+C)+\frac{1}{2})}{4\sin B\cos C}=\frac{2(\cos(B+C)+\cos(B-C))}{4\sin B\cos C}$$
$$=\frac{2(\cos B\cos C-\cancel{\sin B\sin C}+\cos B\cos C+\cancel{\sin B\sin C})}{4\sin B\cos C}$$
$$=\frac{2(2\cos B\cos C)}{4\sin B\cos C}=\frac{4\cos B\cos C}{4\sin B\cos C}=\frac{\cos B}{\sin B}=\cot B$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۲ دوازدهم

۱۴- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=1+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟




۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

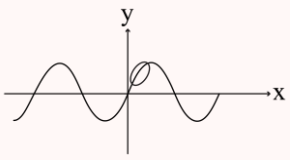
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

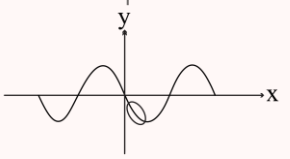
پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

## نکتهٔ ریز در توابع مثلثاتی

$f(x) = a\sin(bx) + c$

- a و b هم‌علامت هستند ← در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد.
- a و b غیرهم‌علامت هستند ← در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد.

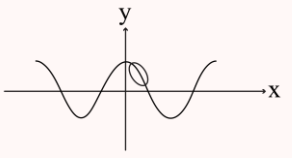


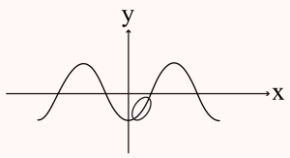




جابجایی روی محور x وجود ندارد.

$f(x) = a\cos(bx) + c$

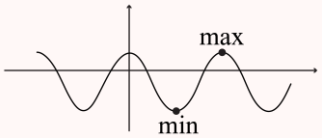
- $a > 0$ (علامت b تأثیر ندارد) ← در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد.
- $a < 0$ (علامت b تأثیر ندارد) ← در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد.



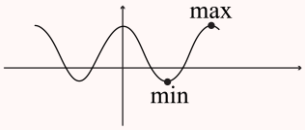




در هر دو نمودار $y = a\sin(bx) + c$ یا $y = a\cos(bx) + c$ می‌توان گفت:

نقطهٔ max به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ min است. $\Rightarrow c < 0$




نقطهٔ min به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ max است. $\Rightarrow c > 0$




**در توابع به فرم $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$ داریم:**

- دوره تناوب $= T = \dfrac{2\pi}{|\text{ضریب x}|} = \dfrac{2\pi}{|b|}$
- بیشترین مقدار تابع $= |a| + d$
- کمترین مقدار تابع $= -|a| + d$

ابتدا به کمک رابطه $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$، ضابطه تابع را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + \frac{a}{2}\sin 2bx$$

پس با توجه به نمودار: (۱) بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است. (۲) دوره تناوب تابع برابر فاصله $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ یعنی $\pi$ است.

$$\xrightarrow{(1)} y_{max} = 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\xrightarrow{(2)} T = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرفی چون نمودار تابع در $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم‌علامت هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

که فقط $a + b = 2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

آزمون وی ای پی



کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

۱۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x+\cos^۳ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۳) $۲\pi$ ۴) $۳\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

**دانستنی‌های واجب مثلثات**

- $\sin u=\sin v \Rightarrow \begin{cases} u=۲k\pi+v \\ u=۲k\pi+\pi-v \end{cases}$
- $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$
- $\sin x\pm\cos x=\sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$

ابتدا به کمک اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$، و نیز رابطه $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ داریم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x \Rightarrow (\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x)=۱-\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)=۱-\sin x\cos x \Rightarrow (۱-\sin x\cos x)(\sin x+\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow (۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)(\sin x+\cos x-۱)=۰$$

می‌دانیم که $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ است. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x+\cos x=۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi \\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow x\in\{۰,۲\pi,\frac{\pi}{۲}\} \\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x=۱ \Rightarrow \sin ۲x=۲ \quad \times \end{cases}$$

$$۰+\frac{\pi}{۲}+۲\pi=\frac{۵\pi}{۲}$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $۳\pi$ ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) $۴\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

**حالت‌های خاص در معادلهٔ مثلثاتی sin**

$$\begin{cases} \sin A=۱ \Rightarrow A=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \sin A=-۱ \Rightarrow A=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

**تکراری اما پرکاربرد**

$\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

ابتدا به کمک اتحاد $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ داریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱-۲(\sin x\cos x)^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ ۲x=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \sin ۲x=-۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ x=k\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۴\pi$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

۱۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x)=1$، در بازهٔ $[\pi,2\pi]$، کدام است؟

۱) $5\pi$ ۲) $6\pi$ ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

ساده باش عین این اتحاد

$$\tan x\cot x=1\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\frac{1}{\cot x}\ ;\ \cot x\neq 0\\ \cot x=\frac{1}{\tan x}\ ;\ \tan x\neq 0\end{cases}$$

ابتدا معادله داده شده را به صورت مقابل می‌نویسیم: $\tan 3x\tan x=1\Rightarrow\tan 3x=\frac{1}{\tan x}=\cot x\ ,\ (\tan x\neq 0)$

می‌دانیم که $\cot x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ است، پس:

$$\tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow 3x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

حال به k مقداردهی می‌کنیم و جواب‌ها را در بازه $[\pi,2\pi]$ پیدا کرده و با هم جمع می‌کنیم: $(k\in\mathbb{Z})$

| k | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $\frac{7\pi}{8}$ | $\frac{9\pi}{8}$ | $\frac{11\pi}{8}$ | $\frac{13\pi}{8}$ | $\frac{15\pi}{8}$ | $\frac{17\pi}{8}$ |

مجموع $=\frac{48\pi}{8}=6\pi$

گروه آموزشی ماز

۱۸- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos 2x$، کدام است؟

۱) $x=\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ ۲) $x=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

۳) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ ۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱

$$\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

نکته ۲

$$\cos u=\cos v\Rightarrow\begin{cases}u=2k\pi+v\\ u=2k\pi-v\end{cases}$$

ابتدا در سمت چپ معادله مثلثاتی به کمک روابط سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو زاویه داریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos 2x$$

$$\Rightarrow(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})+(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})=\cos 2x$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x + \frac{۱}{۲}\cos x) + (\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x) = \cos ۲x$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{۲k\pi}{۳}$، جواب‌های $x = ۲k\pi$ را نیز در برمی‌گیرند. بنابراین جواب معادله مثلثاتی موردنظر، $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ است.

گروه آموزشی ماز

**۱۹- فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟**

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ ۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

می‌دانیم $\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$، یا به عبارت دیگر $۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha$، بنابراین داریم:

$$(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)(۱+\cos ۸\alpha) = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow (۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲ ۲\alpha)(۲\cos^۲ ۴\alpha) = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow (\cos^۲\alpha \cos^۲ ۲\alpha \cos^۲ ۴\alpha) = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow (\cos\alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha)^۲ = \frac{۱}{۶۴}$$

از طرفین رابطه بالا جذر می‌گیریم:

$$\Rightarrow |\cos\alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha| = \frac{۱}{۸}$$

حال طرفین رابطه فوق را در $|\sin\alpha|$ ضرب کنیم: $(\sin\alpha \neq ۰)$ (*)

$$\Rightarrow |\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}\cos ۲\alpha \cos ۴\alpha| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۱}{۲}\underbrace{\sin ۲\alpha \cos ۲\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha}\cos ۴\alpha\right| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$$

$$\Rightarrow |\frac{۱}{۴}\underbrace{\sin ۴\alpha \cos ۴\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۸\alpha}| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}|\sin ۸\alpha| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha| \Rightarrow |\sin ۸\alpha| = |\sin\alpha| \Rightarrow \sin ۸\alpha = \pm\sin\alpha$$

$$\sin ۸\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow ۷\alpha = ۲k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \xrightarrow[۰\le\alpha\le\pi]{k=۳} \alpha_{max} = \frac{۶\pi}{۷} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow ۹\alpha = (۲k+۱)\pi \Rightarrow \alpha = \frac{(۲k+۱)\pi}{۹} \xrightarrow[۰\le\alpha\le\pi]{k=۴} k = ۳ \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۷\pi}{۹} \end{cases}$$

$$\sin ۸\alpha = \sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow ۹\alpha = ۲k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \xrightarrow[۰\le\alpha\le\pi]{k=۴} \alpha_{max} = \frac{۸\pi}{۹} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow ۷\alpha = (۲k+۱)\pi \Rightarrow \alpha = \frac{(۲k+۱)\pi}{۷} \xrightarrow[۰\le\alpha\le\pi]{k=۳} k = ۲ \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۵\pi}{۷} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین جواب ممکن، $\alpha = \frac{۸\pi}{۹}$ خواهد بود.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

شاید براتون سوال باشد که وقتی جواب‌های توی بازه $[۰,\pi]$ قابل قبول هستن، چرا $\alpha=\pi$ رو قبول نمی‌کنیم. باید بگیم که به ازای $\alpha=\pi$ ، $\sin\alpha=۰$ می‌شود و این خلاف فرض ما در قسمت (*) است.

گروه آموزشی ماز

**۲۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(x)\cos(۲x)+\sin(x)=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟**

۱) $۲\pi$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) $۳\pi$ ۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ آزمون وی ای پی (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

**نکته‌های مهم**

- $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$
- $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$
- $\sin f(x)=۱\Rightarrow f(x)=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

ابتدا به کمک رابطه $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$ داریم:

$$۲\sin x\cos ۲x+\sin x=۱\Rightarrow ۲\sin x(۱-۲\sin^۲ x)+\sin x=۱\Rightarrow ۲\sin x-۴\sin^۳ x+\sin x=۱\Rightarrow ۳\sin x-۴\sin^۳ x=۱$$

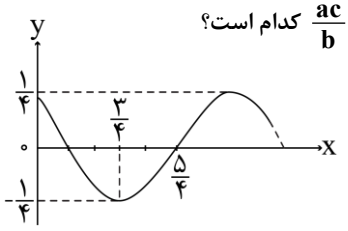
می‌دانیم که $۳\sin x-۴\sin^۳ x=\sin ۳x$ است. پس:

$$\Rightarrow \sin ۳x=۱\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\xrightarrow[k=۰,۱,۲]{x\in[۰,۲\pi]} x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}$$

پس مجموع جواب‌های معادله، برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

گروه آموزشی ماز

**۲۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b>۰$ و $۰<c<\pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟**




۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۴) $\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

**نکته:**

برای تابع $f(x)=a\cos(bx+c)+d$ :

۱) $\max\{f\}=|a|+d$

۲) $\min\{f\}=-|a|+d$

۳) $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

$f'(x)=-ab\sin(bx+c)\rightarrow f'(۰)<۰\rightarrow -ab<۰\rightarrow a>۰$

$\max=a=\frac{۱}{۴}$

$$\begin{cases}\cos(\frac{۳}{۴}b+c)=-۱:\min\text{ اولین}\rightarrow \frac{۳}{۴}b+c=\pi\\ \cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰:\text{دومین ریشه}\rightarrow \frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\pi\\ c=\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow\frac{ac}{b}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۱۶}$$

گروه آموزشی ماز

**۲۲- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۲}$ در بازه $[-\pi,۲\pi]$ کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

$$\bullet \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$$

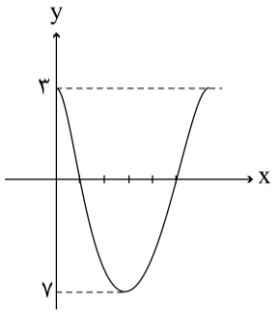
$$\bullet \sin x=\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{9\pi}{4} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{23\pi}{12} \Rightarrow S=\frac{9\pi}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos x+b$ را نشان می‌دهد، مقدار $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟




۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{11}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{11}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

برای تابع $f(x)=a\cos bx+c$:

$$\max\{f\}=|a|+c \quad , \quad \min\{f\}=-|a|+c$$

$$\begin{cases} |a|+b=3 \\ -|a|+b=-7 \end{cases} \Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow b=-2 \ , \ |a|=5 \xrightarrow{a>0} a=5$$

$$\Rightarrow f(x)=5\cos x-2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\left(\frac{1}{2}\right)-2=\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=1$ در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

۱) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

۲) $\sin^2 x=\sin^2\alpha \Rightarrow x=k\pi\pm\alpha$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2} \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \ , \ \frac{5\pi}{4}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

مجموع آن‌ها $= \frac{\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۶\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۲}$

گروه آموزشی ماز

۲۵- در معادلهٔ مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - ۳\sqrt{۶}\sin(۲x) = \sqrt{۶}$، اگر $\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-۶$ ۲) $-۳$ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

**نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:**

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۳) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{۲}{\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$

طرفین رابطه فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$۱ - \sin ۲x = \frac{۶}{۹} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۳}$

حال در رابطه صورت سوال، داریم:

$m(\cos x - \sin x) - ۳\sqrt{۶}\sin(۲x) = \sqrt{۶}$

$m(\frac{\sqrt{۶}}{۳}) - ۳\sqrt{۶}(\frac{۱}{۳}) = \sqrt{۶} \Rightarrow \sqrt{۶}(\frac{m}{۳} - ۱) = \sqrt{۶}$

$\Rightarrow \frac{m}{۳} - ۱ = ۱ \Rightarrow \frac{m}{۳} = ۲ \Rightarrow m = ۶$

گروه آموزشی ماز

۲۶- مجموع جواب‌های معادله $\cos(x - \frac{\pi}{۳}) + \cos(\frac{\pi}{۶} - x) = ۰$ در بازه $(۰, ۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۴) $۲\frac{۹\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

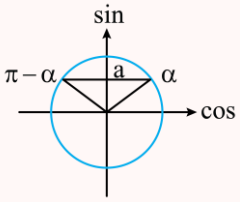
**معادلهٔ مثلثاتی**

معادله‌ای که مجهول آن $(x)$ جلوی یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مانند معادلهٔ $\sin x = \frac{۱}{۲}$. با حل این معادله به‌دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

معادلهٔ مثلثاتی sin:

$\sin x = a \xrightarrow{-۱ \le a \le ۱} \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

$\sin x = \sin y \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + y \\ x = ۲k\pi + \pi - y \end{cases}$

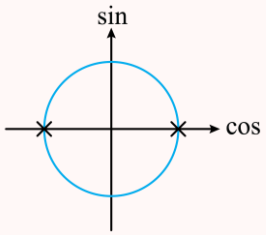



کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

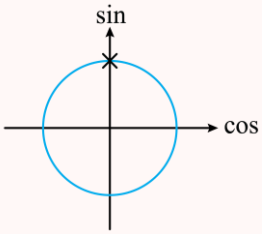
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

حالت‌های خاص:

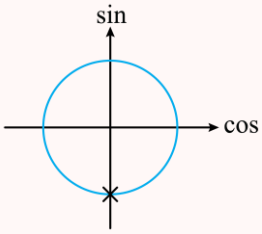
۱) $\sin A = ۰ \Rightarrow A = k\pi$




۲) $\sin A = ۱ \Rightarrow A = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$



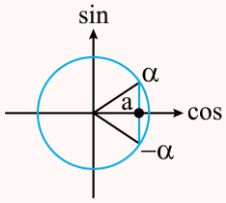

۳) $\sin A = -۱ \Rightarrow A = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$




معادلهٔ مثلثاتی cos:

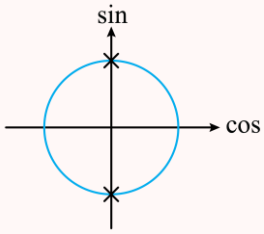
$$\cos x = a \xrightarrow{-۱ \le a \le ۱} \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos y \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + y \\ x = ۲k\pi - y \end{cases}$$

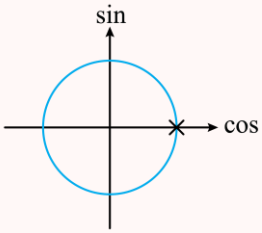



حالت‌های خاص:

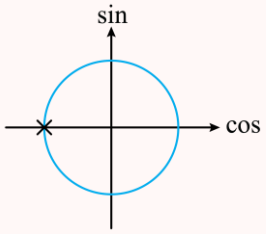
۱) $\cos A = ۰ \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{۲}$




۲) $\cos A = ۱ \Rightarrow A = ۲k\pi$




۳) $\cos A = -۱ \Rightarrow A = ۲k\pi + \pi$




**چند ایدهٔ جالب برای حل معادلات مثلثاتی**

$\sin A = \cos B \Rightarrow \sin A = \sin(\frac{\pi}{۲} - B) \Rightarrow$ ✓

$\cos A = \sin B \Rightarrow \cos A = \cos(\frac{\pi}{۲} - B) \Rightarrow$ ✓

$\sin A = -\sin B \Rightarrow \sin A = \sin(-B) \Rightarrow$ ✓

$\cos A = -\cos B \Rightarrow \cos A = \cos(\pi - B) \Rightarrow$ ✓

$\sin A = -\cos B \Rightarrow \sin A = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - B) \Rightarrow$ ✓

$\cos A = -\sin B \Rightarrow \cos A = \cos(\frac{۳\pi}{۲} - B) \Rightarrow$ ✓

$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) + \cos(\frac{\pi}{۶} - x) = ۰ \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = -\cos(\frac{\pi}{۶} - x)$

می‌دانیم که $\cos(\pi - x) = -\cos x$ است، بنابراین:

$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\pi - (\frac{\pi}{۶} - x)) \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{۵\pi}{۶} + x)$

از طرفی جواب‌های کلی این معادله به‌صورت زیر است:

$\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{۵\pi}{۶} + x)$

۱) $x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + (\frac{۵\pi}{۶} + x) \Rightarrow ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} + \frac{\pi}{۳} = ۰$ غ ق ق

۲) $x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi - (\frac{۵\pi}{۶} + x) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{x\in(۰,۲\pi)}$$

| k | ۱ | ۲ |
|---|---|---|
| x | $\frac{۳\pi}{۴}$ | $\frac{۷\pi}{۴}$ |

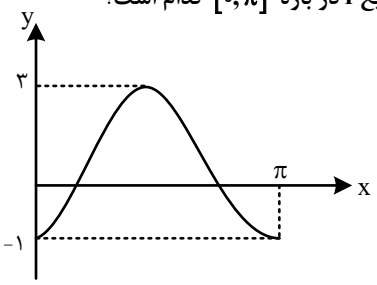
در نتیجه مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر است با:

$$\text{مجموع جواب‌ها} : \frac{۳\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱۰\pi}{۴}=\frac{۵\pi}{۲}$$

توجه کنید که $\cos(\pi+x)=-\cos x$ است، بنابراین اگر دانش‌آموزی سؤال را با این رابطه نیز حل کند، به جواب $\frac{۵\pi}{۲}$ خواهد رسید. (میگی نه، امتحان کن!)

گروه آموزشی ماز

**۲۷- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx-\frac{۳\pi}{۴})\cos(cx-\frac{۳\pi}{۴})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟**




۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

**نکته ۱:**

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر کمان:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

**نکته ۲:**

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)$ :

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta \qquad \cot(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

**نکته ۳:**

دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی:

۱) $a\sin(bx+c)+d\ ,\ a\cos(bx+c)+d\ ,\ [a\sin(bx+c)+d]^m, [a\cos(bx+c)+d]^m$

m: عددی فرد $\qquad T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۲) $[a\sin(bx+c)+d]^m, [a\cos(bx+c)+d]^m, a\tan(bx+c)+d, a\cot(bx+c)+d$

m: عددی زوج $\qquad T=\frac{\pi}{|b|}$

**نکته ۴:**

معادلات مثلثاتی:

۱) $\sin\alpha=\sin\beta$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$\alpha = 2k\pi + \beta$ , $\alpha = 2k\pi + \pi - \beta$

۲) $\cos\alpha = \cos\beta$ $\quad \alpha = 2k\pi \pm \beta$

۳) $\tan\alpha = \tan\beta$ یا $\cot\alpha = \cot\beta$ $\quad \alpha = k\pi + \beta$

به کمک رابطه $\sin 2\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$ داریم:

$$f(x) = a + b\underbrace{\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})}_{\frac{1}{2}\sin 2(cx - \frac{3\pi}{4})} = a + \frac{b}{2}\sin(2cx - \frac{3\pi}{2})$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\sin\Big(-(\frac{3\pi}{2} - 2cx)\Big) = a - \frac{b}{2}\underbrace{\sin(\frac{3\pi}{2} - 2cx)}_{-\cos(2cx)}$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

به کمک نمودار تابع می‌توان فهمید که:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow 2a + b = -2$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 3 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow 2a - b = 6 \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

پس:

$$f(x) = 1 - 2\cos 2x \xrightarrow{f(x)=0} 1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{[0,\pi]} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$